Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2018,
Convocatoria ordinaria

mentoor.es

Opción A

Problema A.1. Álgebra

Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{y - z = 1 - a} \\ \boldsymbol{-x + z = 5} \\ \boldsymbol{-ax + y - z = 1} \end{cases}$ **donde a es un parámetro real. Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) **Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado.**
b) **Las soluciones del sistema cuando** $\boldsymbol{a = 3}$.
c) **Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.**

Solución:

a) **Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado.**

Reordenamos el sistema: $\begin{cases} 0x + y - z = 1 - a \\ -x + 0y + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$. Para que sea compatible determinado, el determinante de la matriz de coeficientes A debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(1+a) - 1(-1) = -1 - a + 1 = -a.$$

El sistema es compatible determinado si $|A| \neq 0$, es decir, si $-a \neq 0 \implies a \neq 0$.

$$\boxed{\textbf{El sistema es compatible determinado para todo } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}.}$$

b) **Las soluciones del sistema cuando** $\boldsymbol{a = 3}$.

Para $a = 3$, el sistema es S.C.D. $|A| = -3$.

$$\begin{cases} y - z = -2 \\ -x + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-25}{-3} = \frac{25}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(10/3, 4, 25/3)}.}$$

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.

El único valor que anula el determinante es $a = 0$. Estudiamos este caso:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La primera y tercera fila son idénticas. $\text{Rg}(A) = 2$. Como una fila es repetida, $\text{Rg}(A^*) = 2$. Es un S.C.I. Resolvemos: $\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 5 \end{cases}$. Hacemos $z = \lambda$. Entonces $y = 1 + \lambda$ y $x = z - 5 = \lambda - 5$.

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{a = 0}, \textbf{ la solución es } \boldsymbol{(\lambda - 5, \lambda + 1, \lambda)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Problema A.2. Geometría

Dados los puntos $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C.**
b) **El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.**
c) **La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.**

Solución:

a) **El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C.**

Si AC es la hipotenusa, el ángulo recto está en B. Por tanto, los vectores $\vec{BA}$ y $\vec{BC}$ deben ser ortogonales, y su producto escalar debe ser cero.

$$\vec{BA} = A - B = (-3,-1,\lambda-5)$$

$$\vec{BC} = C - B = (1,2,-2)$$

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = (-3)(1)+(-1)(2)+(\lambda-5)(-2) = 0$$

$$-3-2-2\lambda+10 = 0 \implies 5-2\lambda = 0 \implies \lambda = 5/2.$$

$$\boxed{\textbf{El valor del parámetro es } \boldsymbol{\lambda = 5/2}.}$$

b) **El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.**

Para $\lambda = 6$, $A(-1,2,6)$. $\vec{AB} = B - A = (3,1,-1)$. $\vec{AC} = C - A = (4,3,-3)$. Área $= \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (0,5,5).$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|(0,5,5)| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+5^2+5^2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\boxed{\textbf{El área es } \boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}} \textbf{ u}^{\mathbf{2}}.}$$

c) **La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.**

El plano está definido por el punto $A(-1,2,6)$ y los vectores $\vec{AB} = (3,1,-1)$ y $\vec{AC} = (4,3,-3)$.
El vector normal es su producto vectorial, $\vec{n} = (0,5,5)$, o uno proporcional como $(0,1,1)$.
La ecuación del plano es $y+z+D=0$. Pasa por $A(-1,2,6)$:
$2+6+D=0 \implies D=-8$.

$$\boxed{\textbf{La ecuación del plano es } \boldsymbol{y+z-8=0}.}$$

Problema A.3. Análisis

Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$ se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.**
b) **Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.**
c) **El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.**

Solución:

a) **El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.**

Dominio: $x^2 - x = 0 \implies x(x-1) = 0 \implies x = 0, x = 1$. $\boldsymbol{D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}}$. Asíntotas Verticales: $x = 0$ y $x = 1$. Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-x} = 0$. Hay A.H. en $y = 0$.

$$\boxed{\textbf{Dominio: } \mathbb{R} \setminus \{0,1\}. \textbf{ A.V.: } x = 0, x = 1. \textbf{ A.H.: } y = 0.}$$

b) **Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.**

$f'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2}$. $f'(x) = 0 \implies 2x - 1 = 0 \implies x = 1/2$.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
Comportamiento	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Máximo relativo en $x = 1/2$, $f(1/2) = -4$.

$$\boxed{\textbf{Creciente: } (-\infty, 0) \cup (0, 1/2). \textbf{ Decreciente: } (1/2, 1) \cup (1, \infty).}$$

c) **El área limitada por la curva...**

Área $= \int_2^3 \frac{1}{x^2-x} dx$. $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \implies 1 = A(x-1) + Bx$. Si $x = 0 \implies A = -1$. Si $x = 1 \implies B = 1$.

$$\int_2^3 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = [-\ln|x| + \ln|x-1|]_2^3 = [\ln|\frac{x-1}{x}|]_2^3$$

$$= \ln(2/3) - \ln(1/2) = \ln\left(\frac{2/3}{1/2}\right) = \ln(4/3).$$

$$\boxed{\textbf{El área es } \ln(4/3) \textbf{ u}^2.}$$

Opción B

Problema B.1. Álgebra

Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$ donde I es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$.**

b) **Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$.**

c) **El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2.**

Solución:

a) **Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$.**

$A^2 + 2A = 3I$. Sacamos factor común A: $A(A + 2I) = 3I$. Dividimos por 3: $A\left(\frac{1}{3}(A + 2I)\right) = I \implies A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I$. Por definición, $A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$.

$$\boxed{a = 1/3, b = 2/3.}$$

b) **Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$.**

$A^2 = 3I - 2A$. $A^3 = A \cdot A^2 = A(3I - 2A) = 3A - 2A^2 = 3A - 2(3I - 2A) = 3A - 6I + 4A = 7A - 6I$. $A^4 = A \cdot A^3 = A(7A - 6I) = 7A^2 - 6A = 7(3I - 2A) - 6A = 21I - 14A - 6A = -20A + 21I$.

$$\boxed{\alpha = -20, \beta = 21.}$$

c) **El determinante de la matriz $2B^{-1}$...**

$|2B^{-1}| = 2^3|B^{-1}| = 8\frac{1}{|B|} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

$$\boxed{\textbf{El determinante es 4.}}$$

Problema B.2. Geometría

Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$ se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) **La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r.**
b) **La distancia del punto A a la recta r.**
c) **La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por (3,-1,0) y es perpendicular a r.**

Solución:

a) **La recta s que corta a la recta r...**

Sea P_r el punto de intersección. P_r es un punto genérico de r: $(3-t, -1+3t, 2t)$.

El vector $\vec{AP_r} = (-2-t, -8+3t, 2t-3)$ debe ser perpendicular a $\vec{v}_r = (-1,3,2)$.
$\vec{AP_r} \cdot \vec{v}_r = 0 \implies (-2-t)(-1) + (-8+3t)(3) + (2t-3)(2) = 0$.
$2 + t - 24 + 9t + 4t - 6 = 0 \implies 14t - 28 = 0 \implies t = 2$.

El punto de intersección es $P_r(1,5,4)$. La recta s pasa por A y P_r.
$\vec{v}_s = \vec{AP_r} = (-4,-2,1)$.

$$\boxed{\textbf{La recta es } \boldsymbol{s : (x,y,z) = (5,7,3) + \lambda(-4,-2,1)}.}$$

b) **La distancia del punto A a la recta r.**

La distancia es el módulo del vector $\vec{AP_r}$ que calculamos:
$d(A,r) = |\vec{AP_r}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$.

$$\boxed{\textbf{La distancia es } \boldsymbol{\sqrt{21}}.}$$

c) **La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π...**

El plano π pasa por $(3,-1,0)$ y su vector normal es $\vec{v}_r = (-1,3,2)$.
$-1(x-3) + 3(y+1) + 2(z-0) = 0 \implies -x + 3y + 2z + 6 = 0$.
$d(B,\pi) = \frac{|-1(1)+3(1)+2(1)+6|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}$.

$$\boxed{\textbf{La distancia es } \boldsymbol{\frac{5\sqrt{14}}{7}}.}$$

Problema B.3. Análisis

Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud 100-x, se construye un cuadrado. Se pide obtener razonadamente...:

a) **La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$.**
b) **El valor de la variable x para el cual dicha función alcanza su mínimo valor.**
c) **El valor de la variable x para el cual dicha función alcanza su máximo valor.**

Solución:

a) **La función de la variable x que expresa la suma de las áreas...**

Triángulo: Lado $= x/3$. Área $= \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{x}{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$.
Cuadrado: Lado $= \frac{100-x}{4}$. Área $= (\frac{100-x}{4})^2 = \frac{(100-x)^2}{16}$.
$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(100-x)^2}{16}$.

$$\boxed{\boldsymbol{A(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{(100-x)^2}{16}}.}$$

b) **El valor de la variable x para el cual alcanza su mínimo valor.**

$A'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{36}x + \frac{2(100-x)(-1)}{16} = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{100-x}{8}$.
$A'(x) = 0 \implies \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{100-x}{8} \implies 8\sqrt{3}x = 1800 - 18x \implies (8\sqrt{3}+18)x = 1800 \implies x = \frac{1800}{18+8\sqrt{3}} \approx 56.5$.
Como $A''(x) > 0$, es un mínimo.

$$\boxed{\textbf{El mínimo se alcanza en } \boldsymbol{x = \frac{1800}{18+8\sqrt{3}}} \textbf{ cm}.}$$

c) **El valor de la variable x para el cual alcanza su máximo valor.**

El máximo de una función continua en un intervalo cerrado está en los extremos o en los puntos críticos. Como el único punto crítico es un mínimo, el máximo debe estar en los extremos del intervalo $[0, 100]$.
$A(0) = \frac{100^2}{16} = 625$. (Todo el alambre para el cuadrado).
$A(100) = \frac{\sqrt{3}}{36}100^2 \approx 481.1$. (Todo el alambre para el triángulo).
El valor máximo se alcanza cuando $x = 0$.

$$\boxed{\textbf{El máximo se alcanza en } \boldsymbol{x = 0}, \textbf{ que significa usar todo el alambre para construir el cuadrado.}}$$